



Portfolio optimization using the modified Markowitz model based on CO-GARCH modeling in comparison with the market

Fahime Jahanian ^۱, Seyyed Ali Paytakhti Oskooe ^۲, Ahmad Mohammadi ^۳, Aliasghar Mottaghi ^۴

۱. Ph.D. Candidate in financial engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. E-mail: f.jahanian_۸۹@yahoo.com
۲. Corresponding Author, Associate Professor, Department of Economics, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. E-mail: oskooe@yahoo.com
۳. Assistant Professor, Department of Accounting, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. E-mail: iacpa_a_mohammadi@yahoo.com
۴. Assistant Professor, Department of Accounting, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. E-mail: Aliasghar.mottaghi@yahoo.com

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received: ۲۷ October ۲۰۲۱

Revised in revised form: ۱۰

January ۲۰۲۲

Accepted: ۴ September ۲۰۲۲

Published online: ۷ September

۲۰۲۲

Keywords:

portfolio optimization,
Markowitz model,
CO-GARCH modeling,
Market.

Portfolio optimization and deciding which stocks deserve to be included in the investment portfolio and how to allocate capital are complex issues. Theoretically, the selection of the stock portfolio in the case of risk minimization can be solved using mathematical formulas and through a quadratic equation, but in the real world, given that the behavior of the stock market does not follow a linear pattern, common linear methods also cannot be useful in describing this behavior. A natural way to consider time-based constraints of discrete processes is to use GARCH family models. The continuous-time GARCH (CO-GARCH) model is a direct analogue of the discrete-time GARCH that generalizes the basic features of the mentioned process in a natural way. Another advantage of the CO-GARCH model is that its second-order structure is known and defined. Therefore, in this research, portfolio optimization using the modified Markowitz model based on CO-GARCH modeling has been investigated in comparison with the market. The statistical population of the current research includes the information of the companies admitted to the Tehran Stock Exchange for the period of ۲۰۱۰ to ۲۰۱۹ and the statistical sample was selected using the systematic elimination method. First, the optimal investment model based on the Markowitz model based on the CO-GARCH model was presented and then compared with the market. The results of the research indicate that the efficiency of the optimal portfolio formed using the modified Markowitz model based on CO-GARCH fluctuations has a significant difference compared to the efficiency of the market.

Cite this article: Jahanian, F., Paytakhti Oskooe, S A., Mohammadi, A., & Mottaghi, A. (۲۰۲۲). Portfolio optimization using the Markowitz model based on CO-GARCH modeling in comparison with the market, *Stable Economy Journal*, ۷ (۲), ۶۹-۸۲. DOI: ۱۰.۲۲۱۱۱/SEDJ.۲۰۲۲.۴۳۴۱۱.۱۲۲۹



© The Author(s).

Publisher: University of Sistan and Baluchestan

DOI: ۱۰.۲۲۱۱۱/SEDJ.۲۰۲۲.۴۳۴۱۱.۱۲۲۹

بهینه‌سازی پرتفو با استفاده از مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر مدلسازی CO-GARCH در قیاس با بازار

فهمیه جهانیان^۱، سیدعلی پایتختی اسکویی^۲، احمد محمدی^۳ و علی اصغر متقی^۴

۱. دانشجوی دکتری مهندسی مالی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری، واحد تبریز؛ دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. رایانامه: f.jahanian_۸۹@yahoo.com
۲. نویسنده مسئول، دانشیار، گروه اقتصاد، دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. رایانامه: oskooe@yahoo.com
۳. استادیار، گروه حسابداری، دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری، واحد تبریز؛ دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. رایانامه: iacpa_a_mohammadi@yahoo.com
۴. استادیار، گروه حسابداری، دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری، واحد تبریز؛ دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. رایانامه: Aliasghar.mottaghi@yahoo.com

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	بهینه‌سازی پرتفو و تصمیم‌گیری درباره اینکه کدام سهام شایستگی قرار گرفتن در سبد سرمایه‌گذاری را دارد و چگونگی تخصیص سرمایه، مباحثی پیچیده است. از لحاظ نظری، انتخاب سبد سهام در حالت حداقل کردن ریسک در صورت ثابت در نظر داشتن بازده از طریق یک معادله درجه دوم قابل حل است، لیکن در دنیای واقعی با توجه به اینکه رفتار بازار سهام از یک الگوی خطی پیروی نمی‌کند، روش‌های خطی رایج نیز نمی‌تواند در توصیف این رفتار مفید واقع شود. یک روش طبیعی برای لحاظ کردن محدودیت‌های مبتنی بر زمان فرآیندهای گسسته، استفاده از مدل‌های خانواده GARCH است. مدل CO-GARCH با زمان پیوسته (CO-GARCH) آنالوگ مستقیمی از GARCH با زمان گسسته است که ویژگی‌های اساسی فرایند مذکور را به روشی طبیعی تعمیم می‌دهد. مزیت دیگر مدل CO-GARCH این است که ساختار مرتبه دوم آن شناخته شده و مشخص است. لذا در این پژوهش بهینه‌سازی پرتفو با استفاده از مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر مدلسازی CO-GARCH در قیاس با بازار بررسی شده است. جامعه آماری پژوهش حاضر شامل اطلاعات شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران برای دوره زمانی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۹ بوده و نمونه آماری با استفاده از روش حذف سیستماتیک انتخاب گردید. ابتدا مدل بهینه سرمایه‌گذاری بر اساس مدل مارکویتز مبتنی بر مدلسازی CO-GARCH ارائه شده و سپس با بازار مقایسه گردید. نتایج پژوهش حاکی از آن است که کارایی پرتفوی بهینه تشکیل شده با استفاده از مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر نوسانات CO-GARCH در مقایسه با کارایی بازار دارای تفاوت معناداری می‌باشد.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۸/۵	
تاریخ ویرایش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۰	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۶/۱۳	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۶/۱۵	
واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پرتفوی، مدل مارکویتز، مدلسازی CO-GARCH، بازار.	

استناد: جهانیان، فهمیه؛ پایتختی اسکویی، سیدعلی؛ محمدی، احمد و متقی، علی اصغر (۱۴۰۱). بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر مدلسازی CO-GARCH در قیاس با بازار، اقتصاد باثبات، ۳ (۲)، ۶۹-۸۲.

DOI: ۱۰,۲۲۱۱۱/SEDJ.۲۰۲۲,۴۳۴۱۱,۱۲۲۹



۱. مقدمه

در گذشته اعتقاد بر آن بود که روشهای بهینه‌سازی پرتفو مبتنی بر مدل استاندارد مارکوویتز، در تنوع بخشیدن به ریسک غیر سیستماتیک کارا عمل می‌کند (مازومدار و همکاران، ۲۰۲۰). اما پس از بحران‌های اخیر، بازارهای مالی غافلگیر شدند. در واقع مقیاس قضاوت نادرست، تردیدهایی را ایجاد و خلأ روش‌های موجود در ساخت پرتفو و مدیریت ریسک را نمایان کرد. با توجه به ضرورت موضوع تنوع و بهینه‌سازی پرتفو از حیث مدیریت ریسک، در رساله حاضر، متد جدیدی برای ساخت پرتفو و بهینه‌سازی ریسک غیر سیستماتیک، با استفاده از تعدیل مدل کلاسیک و استاندارد مارکوویتز مبنی بر محاسبه ریسک مبتنی بر وارینانس‌های شرطی خانواده گارچ، با هدف حداقل‌سازی ریسک پرتفو و حداکثرسازی نسبت تنوع جهت افزایش کارایی پرتفوی بهینه ارائه می‌شود؛ در نهایت نتایج آماری پرتفوی ارائه شده با عملکرد بازار قیاس می‌گردد.

مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری از مسائل کلاسیک دنیای مالی می‌باشد که اولین بار توسط هری مارکوویتز (۱۹۵۲) بیان گردید. رویکرد مارکوویتز به دنبال حداکثرکردن بازده پرتفو و حداقل کردن ریسک آن است که در آن معمولاً یک جزء ریسک یا بازده در تابع هدف قرار گرفته و دیگری به عنوان یک محدودیت در نظر گرفته می‌شود. یکی از راهکارهایی که تقریباً در تمامی مطالعات علمی و تجربی بدان اشاره شده، ایجاد یک سبد سهام است که بتوان از طریق آن مدیریت مناسبی بر ریسک‌های موجود داشت تا در نهایت بیشترین سود ممکن حاصل شود. اما موضوعی که در این زمینه مطرح می‌شود، ایجاد سبد بهینه سهام با توجه به اهداف مختلف سرمایه‌گذاران بوده که خود به عنوان یک مسأله پیچیده مورد توجه است. در یک تعریف کلی مسأله انتخاب سبد سهام به معنای به حداقل رساندن ریسک موجود در سرمایه‌گذاری با توجه به سطح معینی از بازده می‌باشد.

بهینه‌سازی اوراق بهادار برای ایجاد تعادل بین بازده مورد انتظار بازار و اندازه ریسک پیش‌بینی‌شده سرمایه‌گذاری نیازمند آگاهی است. نظریه مدرن پرتفولیو (MPT) که توسط مارکوویتز ارائه گردید، یک نظریه سرمایه‌گذاری است و بر این موضوع تأکید دارد که چگونه ریسک، بخشی ذاتی از بازده سبد سهام است و ایده بهینه‌سازی بازده مورد انتظار پرتفولیو را بر اساس درجه ریسک‌پذیری یک سرمایه‌گذار و با در نظر گرفتن ریسک بازار ارائه می‌دهد (Markowitz, ۱۹۵۹). نظریه مارکوویتز اهمیت انتخاب مناسب اوراق بهادار برای ساختن سبد سهام را نشان می‌دهد و توضیح می‌دهد که چگونه مدیریت سرمایه‌گذاری یک بازی ساده برای انتخاب چند سهام از بازار نیست.

نوسان قیمت چندین دارایی در یک پرتفوی با هم همبستگی دارد که به طور معمول منشأ ریسک بازار است (Seltzer, ۲۰۱۸).

مطابق تئوری‌های بازار سرمایه، ریسک ناشی از نگهداری یک سهم منفرد، بسیار بیشتر از ریسک پرتفو با حداقل همبستگی است. برای مجموعه محدودی از اوراق بهادار در یک پرتفو، متداول‌ترین منبع نوسان قیمت سهم، ریسک بازار است که به عنوان عامل کلی نیز شناخته می‌شود. معمولاً دارایی‌های یک پرتفو اگر از ریسک بازار مجزا شوند، نوسان کمتری دارند؛ در حالی که دارایی‌هایی که در معرض ریسک‌های بازار قرار دارند، نه تنها بسیار بی‌ثبات هستند، بلکه سود یا زیان زیادی نیز به همراه دارند. مدیریت ریسک پرتفولیو، ریسک‌ها را به دو دسته ریسک سیستماتیک و ریسک غیر سیستماتیک طبقه‌بندی کرده است. ریسک بازار یا ریسک سیستماتیک یک ریسک ذاتی برای بازار به عنوان یک کل است و تأثیر آن مختص صنعت یا بخش خاصی نیست. در حالی که ریسک غیر سیستماتیک تقریباً هیچ ارتباطی با ریسک سیستماتیک ندارد و ریسک خاص صنعت یا یک بخش است و لذا زمینه‌ای مناسب برای مطالعه و شناسایی تکنیک‌های جدید متنوع‌سازی و بهینه‌سازی ریسک پرتفوی محسوب می‌شود (رضایی و همکاران، ۱۳۹۷).

در این پژوهش، یک روش جدید برای بهینه‌سازی ریسک غیر سیستماتیک با متنوع‌سازی بهینه دارایی‌های یک پرتفو، با استفاده از مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر نوسانات *CO-GARCH* ارائه می‌گردد. بدین ترتیب که با تجزیه نظام‌مند ریسک نهایی هر سهم از مجموعه سهم‌های در اختیار، سهمی که شرایط اولیه ورود به پرتفو را دارند، برگزیده می‌شوند. در مرحله بعدی، شرطی شده مدل مارکویتز بر مبنای نوسانات *CO-GARCH*، با هدف حداکثر کردن تنوع‌سازی پرتفولیو و از بین بردن ریسک غیر سیستماتیک در پرتفو اعمال می‌شود. مدل پیشنهادی جهت افزایش قابلیت یادگیری ماشین، دو تکنیک شناخته شده مدیریت ریسک پرتفو، شامل سهم ریسک (Cai, ۲۰۱۸) و حداکثر نسبت تنوع (Chouiefaty and Coignard, ۲۰۰۸) است. روش بودجه‌ریزی ریسک، برای شناسایی سهام پر ریسک مجموعه سهم‌های در اختیار استفاده می‌شود. سپس یافته‌ها در تطبیق با بازده شاخص‌های اصلی بازار سرمایه همچون شاخص کل و ۵۰ شرکت فعال بررسی و تحلیل می‌شوند. در نهایت با توجه به نتایج و قیاس آنها، عملکرد استراتژی حداکثر تنوع پیشنهادی می‌تواند بیشتر به عنوان روشی جهت ایجاد تنوع پرتفولیو و مدیریت ریسک بکار گرفته شود.

۲. مدل مارکویتز

مارکویتز کسی بود که مفهوم متنوع‌سازی اوراق بهادار را معرفی و توسعه داد. وی به طور کلی نشان داد که چگونه متنوع‌سازی، ریسک سبد سهام سرمایه‌گذار را کاهش می‌دهد. سرمایه‌گذاران می‌توانند با به حداقل رساندن ریسک پرتفو، پرتفوی کارا برای بازده معین بدست آورند. بعلاوه، فرآیند فوق می‌تواند منجر به تشکیل سبدهای کارایی شود که مرز کارآی میانگین واریانس نامیده می‌شوند (مهدی‌زاده و ثابت، ۱۳۹۲).

برای استفاده از مدل مارکویتز، داده‌های زیر نیاز است:

(۱) بازده مورد انتظار مربوط به سهم i ، $E(R_i)$

(۲) انحراف معیار بازده مورد انتظار برای سهم i که به عنوان معیاری برای ریسک هر سهم در نظر گرفته شده، S_i

(۳) کوواریانس، به عنوان معیار اندازه‌گیری ارتباط و همبستگی بین نرخهای مختلف بازده سهام،

$\delta_{i,j}$

دلیل اینکه سهام شرکت یک دارایی ریسکی است، آن است که کلیت نرخ بازدهی آن (هفتگی، ماهانه، سالانه) تصادفی نیست. با تغییر این نرخ‌ها در طول زمان، می‌توان آنها را به توزیع‌های احتمالی تقسیم کرد و معیارهای مورد نیاز برای مدل مارکویتز را محاسبه کرد، مانند میانگین، انحراف معیار، کوواریانس و غیره (زنجیردار، ۲۰۱۸).

مدل مارکویتز بر اساس مفروضات زیر است:

سرمایه‌گذاران گریزان از ریسک بوده و بازدهی مازاد را انتظار دارند؛ لذا منحنی مطلوبیت نهایی ثروت آنها نزولی است.

سرمایه‌گذاران پرتفوی خود را بر اساس بازده میانگین واریانس مورد انتظار انتخاب می‌کنند. بنابراین، منحنی‌های بی تفاوتی آنها تابعی از نرخ بازده و واریانس مورد انتظار است. هر گزینه سرمایه‌گذاری به صورت نامحدود قابل تقسیم است.

سرمایه‌گذاران افق زمانی دارند و این برای همه سرمایه‌گذاران یکسان است. آنها بازده بالاتر از سطح معین ریسک را ترجیح می‌دهند و از طرف دیگر، سرمایه‌گذاران دو عامل زیر را در انتخاب خود در نظر می‌گیرند (مارکویتز، ۱۹۵۲)

الف) "بازده مورد انتظار بالا" که عامل مطلوبی است.

ب) "عدم اطمینان نسبت به بازدهی" که عامل نامطلوبی است. برای دستیابی به انتخاب پرتفوی بهینه در روش مارکوویتز که کمترین واریانس را برای سطح معین از بازدهی خاص ایجاد کند، مدل برنامه‌ریزی خطی زیر ارائه می‌گردد (مهدی زاده و ثابت، ۱۳۹۲):

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \delta_p^x, \quad \delta_p^x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i \cdot w_j \cdot \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_j) \\ \text{st } \bar{r}_p &= \sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{r}_i \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1, \quad w_i > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

بطوری که::

w_i : وزن مربوط به سهم i در پرتفو

\bar{r}_p : بازدهی مورد انتظار پرتفو

r_i : بازدهی سهم i

δ_p^x : واریانس بازدهی پرتفو

۳. روش پژوهش

پژوهش فوق از نوع کاربردی، استقرایی، توصیفی و پس رویدادی است. تحقیقات کاربردی تحقیقاتی هستند که با استفاده از زمینه و بستر شناختی و معلوماتی که از طریق تحقیقات بنیادی فراهم شده، برای رفع نیازمندی‌های بشر و بهبود و بهینه‌سازی ابزارها، روش‌ها، اشیا و الگوها در جهت توسعه رفاه و آسایش و ارتقای سطح زندگی انسان مورد استفاده قرار می‌گیرند (حافظ‌نیا، ۱۳۸۶). از بعد ماهیت و روش نیز می‌توان این بخش را از نوع تحقیقات توصیفی دانست. تحقیق توصیفی شامل مجموعه روش‌هایی است که هدف آنها توصیف کردن شرایط یا پدیده‌های مورد بررسی است. اجرای تحقیق توصیفی می‌تواند صرفاً برای شناخت بیشتر شرایط موجود یا یاری دادن به فرآیند تصمیم‌گیری باشد (سرمد و همکاران، ۱۳۹۰).

در پژوهش حاضر کارایی روش ساخت پرتفو و بهینه‌سازی ریسک غیر سیستماتیک، با استفاده از مدل مارکوویتز مبتنی بر نوسانات *CO-GARCH* آزمون می‌شود. بدین ترتیب یک مدل تشکیل پرتفو با استفاده از روش‌های یادگیری ماشین ایجاد می‌شود تا مؤلفه ریسک را با توجه به مجموع دارایی‌های مورد بررسی به حداقل رساند. سپس با استفاده از مجموعه‌ای از دو تکنیک شناخته شده معروف به حداکثر نسبت تنوع و سهم ریسک پرتفو، از تکنیک‌های تقویت‌کننده مذکور برای تشکیل پرتفوی سهام استفاده می‌شود (Mullen, 2011).

یکی از ایرادهای اساسی به مدل پرتفولیو مارکوویتز، استفاده از واریانس نمونه به عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک است، واریانسی که به عنوان متقارن شناخته شده است. با توجه به موارد گفته شده و به ویژه با در دسترس بودن داده‌ها، یک روش طبیعی برای لحاظ کردن محدودیت‌های مبتنی بر زمان فرآیندهای گسسته، استفاده از مدل‌های خانواده *GARCH* است؛ کلپلبرگ و همکاران^۱ (2004) روش کاملاً متفاوتی را برای به دست آوردن مدل زمان مستمر پیشنهاد کردند. مدل *GARCH* با زمان پیوسته (*CO-GARCH*) آنالوگ مستقیمی از *GARCH* با زمان گسسته است، که بر اساس یک فرایند Lévy در یک پس زمینه قرار دارد و ویژگی‌های اساسی فرایند *GARCH* با زمان گسسته را به روشی طبیعی تعمیم می‌دهد.

جامعه آماری پژوهش حاضر شامل اطلاعات شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران برای دوره زمانی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۹ بوده است. تحلیل نتایج برای برآورد نوسانات و تعدیل مدل مارکوویتز مبتنی بر مدل‌سازی *CO-GARCH* با استفاده از نرم‌افزار *R* صورت می‌گیرد. در خصوص مدل تعدیل شده مارکوویتز، همانطور که ذکر شد بهینه‌سازی با الگوریتم تکامل افتراقی پیاده‌سازی شده در نرم‌افزار *R* از طریق پکیج *DEoptim* مولن و همکاران (2011) اعمال می‌شود. هر پرتفو در یک دوره سالانه به صورت ماهانه متعادل می‌شود. برای ایجاد تنوع و کاهش ریسک، محدودیت وزن ω_i برای سهم i باید بین ۰,۲ تا ۰,۶ باشد (Choueifaty, 2008).

جهت تعیین عملکرد پرتفوی بهینه (پیشنهادی) از آزمون مقایسه (تفاوت) میانگین‌ها و با استفاده از آزمون لوین و نسبت شارپ (به عنوان معیار ارزیابی ریسک) اقدام می‌شود. نسبت شارپ بیانگر

^۱ Klüppelberg

نسبت متوسط بازدهی کسب شده بیش از نرخ بازدهی بدون ریسک است. کسر نرخ بدون ریسک از متوسط بازدهی، باعث تفکیک سود مرتبط با فعالیتهای ریسک پذیر می شود.

مشخصات مدل $CO-GARCH$ از دو معادله با منبع واحد تغییر که توسط فرآیند لوی $(L_t)_t \geq 0$ ران می شود، تشکیل شده است. دقیق تر، $(G_t)_t \geq 0$ در فرآیند $CO-GARCH$ بر حسب معادله دیفرانسیل تصادفی تعریف می شود:

$$dG_t = \sigma_t^- dL_t, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

که در آن فرایند نوسانات σ_t^- ، با معادله دیفرانسیل تصادفی زیر تعیین می شود:

$$d\sigma_t^- = (\omega - \gamma\sigma_t^-)dt + \alpha\sigma_t^- d[L, L]_t^d \sigma_t^-, \quad t > 0, \quad \omega > 0, \gamma \geq 0, \alpha > 0 \quad (3)$$

روند واریانس درجه دوم $[L, L]_t^d$ پارمتر L عبارتست از:

$$[L, L]_t^d = \sum_{0 < s \leq t} (\Delta L_s)^2, \quad L_t = L_t - L_{t-} \text{ for } t \geq 0 \text{ with } L_{-} = 0 \quad (4)$$

و در نهایت برای بدست آوردن حل دیفرانسیل تصادفی می توان از فرایند کمکی $Lévy$ به شرح

مدل زیر استفاده کرد:

$$\sigma_t^- = \exp\left(-\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \left(\omega \int_0^t \exp\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) ds + \sigma_0^-\right), \quad t \geq 0 \quad (5)$$

معادله اخیر نشان می دهد که σ_t^- از یک فرایند $Ornstein - Uhlenbeck$ تعمیم یافته که توسط ω, γ, α پارامتر شده و توسط فرآیند $Lévy$ هدایت می شود، پیروی می کند. بازده ورود به سیستم مالی با افزایش روند $G_t, G_t = h - G_t + G_t$ مدل می شود. روند $Lévy$ تنها منبع تصادفی بودن است و وقتی جهش می یابد، هم قیمت و هم نوسان همزمان جهش می کنند ($Chouiefaty$ ، ۲۰۰۸).

در نهایت، بهینه سازی با الگوریتم تکامل افتراقی پیاده سازی شده در نرم افزار R از طریق پکیج $DEoptim$ مولن و همکاران (۲۰۱۱) اعمال می شود. هر پرتفو در یک دوره سالانه به صورت ماهانه متعادل می شود. برای ایجاد تنوع و کاهش ریسک، محدودیت وزن ω_i برای سهم i باید بین ۰٫۲ تا ۰٫۶ باشد.

بنابراین تابع به شرح ذیل تعریف می شود:

$$\sigma_t^- = \exp\left(-\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right) \left(\omega \int_{-1}^0 \exp\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right) ds + \sigma_0^-\right) \quad (6)$$

برای مقایسه از آزمون مقایسه میانگین‌های دو گروه مستقل و با استفاده از آزمون لوبین و نسبت شارپ استفاده شده است.

۴. یافته‌ها

آمار توصیفی بیان‌کننده میزان بازده مورد انتظار سرمایه‌گذاری و واریانس آن نیز برای هر یک از متغیرها در جدول شماره ۱ بیان گردیده است:

جدول ۱: میزان بازده و واریانس پرتفو برای متغیرها (منبع: یافته‌های تحقیق)

بازار		CO-GARCH		مدل
بازده	واریانس	بازده	واریانس	متغیرها
۱,۶۵۶۵	۴,۴۰۳۶	۰,۳۰۷۵	۰,۵۲۷۵	EPS
۰,۲۳۴۴	۰,۲۳۶۳	۰,۴۲۰۰	۰,۲۷۳۱	P/E
-۰,۱۴۷۸	۱,۴۳۷۸	۰,۱۹۷۱	۱,۱۷۳۹	آخرین قیمت سهام
۰,۱۶۰۴	۰,۳۸۴۷	۰,۱۹۹۳	۰,۳۹۵۹	جریان‌های نقدی
۰,۵۵۷۸	۰,۳۲۷۰	۰,۲۲۷۲	۰,۳۵۱۶	ROA
۰,۲۹۶۷	۰,۷۶۸۲	۰,۲۴۶۱	۰,۵۹۲۸	DPS
۰,۲۸۹۳	۰,۵۷۵۰	۰,۳۰۴۵	۰,۷۲۸۶	سهام شناور آزاد

بازده مورد انتظار برای پرتفوی سرمایه‌گذاری در مدل CO-GARCH بهتر از بازار می‌باشد. میزان بازده مورد انتظار برای مدل بازار کمتر از الگوریتم CO-GARCH می‌باشد که نشان می‌دهد مدل بازار با در نظر گرفتن میزان ثابت بازده یعنی میانگین بازدهی شرکت‌ها میزان بازدهی ثابتی را در مدل خود اعمال نموده است و اینکه الگوریتم CO-GARCH آزاد بوده و هر میزان بازدهی را می‌تواند اختیار کند.

میزان انحراف معیار یا ریسک مدل CO-GARCH کمتر از مدل بازار می‌باشد که بیانگر این است که مدل CO-GARCH از سطح اطمینان بالاتر و ریسک کمتری نسبت به مدل بازار برخوردار می‌باشد.

جدول ۲: آزمون لوبین برای مقایسه تفاوت کارایی مدل مارکویتز با بازار (منبع: یافته‌های تحقیق)

سطح معنی‌داری	f	آزمون تفاوت میانگین
۰/۰۰۱	۳۱/۱۲	تفاوت کارایی مدل مارکویتز با بازار

از آنجایی سطح معنی داری آزمون لوین ۰/۰۰۱ می باشد، فرض برابری واریانس جامعه تأیید نمی شود و آزمون تساوی میانگین با فرض عدم برابری واریانس انجام می شود.

جدول ۳: آزمون تفاوت میانگین گروهها (منبع: یافته های تحقیق)

انحراف معیار تفاوت	تفاوت میانگین	حد پایین	حد بالا	سطح معنی داری	درجه آزادی	آماره t	آزمون تفاوت میانگین
۰/۰۰۸۱	۰/۰۹۱۵	۰/۱۰۹۰	۰/۰۴۲۳	۰/۰۰۱	۶۸۰/۱۳	۱۰/۲۰۱	تفاوت کارایی $CO-GARCH$ با بازار

با توجه به اینکه مقدار سطح معنی داری مربوطه ۰/۰۰۱ می باشد، بنابراین فرض تساوی گروهها رد می شود و بین کارایی دو گروه تفاوت معنی داری وجود دارد و با توجه تفاوت حد بالا و حد پایین می توان نتیجه گرفت مدل مارکویتز بر مبنای نوسانات مبتنی بر $CO-GARCH$ نسبت به بازار دارای کارایی بالاتری می باشد.

جدول ۴: معیار شارپ برای خروجی دو روش استفاده شده (منبع: یافته های تحقیق)

ضریب ریسک گریزی	۱,۰۰۰	۰,۹۰۰	۰,۸۰۰	۰,۷۰۰	۰,۶۰۰	۰,۵۰۰	۰,۴۰۰	۰,۳۰۰	۰,۲۰۰	۰,۱۰۰	۰,۰۰۰
Markowitz	۰,۸۲۳	۰,۹۴۲	۰,۹۳۵	۱,۰۰۰	۱,۱۰۹	۰,۷۴۹	۰,۷۵۹	۰,۶۰۵	۰,۳۶۸	۰,۲۸۰	۰,۲۵۰
Ba	۰,۷۵۱	۰,۸۴۸	۱,۰۲۷	۱,۰۴۶	۱,۰۱۶	۰,۶۹۸	۰,۷۳۸	۰,۶۰۱	۰,۳۷۱	۰,۲۸۱	۰,۲۸۷
Markowitz	۰,۸۰۲	۰,۹۰۴	۰,۸۸۵	۱,۰۲۴	۱,۰۱۷	۰,۷۷۶	۰,۷۵۴	۰,۵۸۷	۰,۳۴۰	۰,۲۹۱	۰,۲۵۹
Ba	۰,۷۸۲	۰,۸۸۲	۱,۱۵۸	۱,۱۲۶	۰,۸۲۵	۰,۶۹۷	۰,۷۵۲	۰,۶۳۵	۰,۳۶۶	۰,۲۹۵	۰,۳۱۰
Markowitz	۰,۸۱۴	۰,۹۱۰	۰,۸۳۵	۰,۹۶۱	۱,۰۱۷	۰,۸۰۷	۰,۷۴۱	۰,۶۱۵	۰,۳۱۹	۰,۲۹۵	۰,۲۷۷
Ba	۰,۸۳۳	۰,۸۱۸	۱,۰۷۸	۱,۰۵۱	۰,۷۸۰	۰,۵	۰,۶۳۱	۰,۶۷۱	۰,۳۶۶	۰,۲۹۹	۰,۲۹۹

بر اساس نسبت شارپ، مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر مدل سازی $CO-GARCH$ کارایی بهتری نسبت به بازار دارد.

۵. نتیجه گیری

تصمیم گیری درباره انتخاب سهام مناسب جهت بهینه سازی پرتفو مسأله مهمی است که در خصوص کاهش ریسک سرمایه گذاری و افزایش بازده آن باید مدنظر قرار داد. با توجه به اینکه در عمل، رفتار بازار سهام از یک الگوی خطی پیروی نمی کند، نیاز به روشی در توصیف این رفتار ضروری

می‌باشد. یک روش طبیعی برای این منظور، استفاده از مدل *GARCH* با زمان پیوسته (*CO-GARCH*) می‌باشد که آنالوگ مستقیمی از *GARCH* با زمان گسسته بوده و ساختار مرتبه دوم آن شناخته شده و مشخص است. لذا در این پژوهش، بهینه‌سازی پرتفو با استفاده از مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر مدلسازی *CO-GARCH* در قیاس با بازار بررسی شده است. ابتدا مدل بهینه سرمایه‌گذاری بر اساس مدل مارکویتز مبتنی بر مدلسازی نوسانات بر مبنای *CO-GARCH* ارائه شده و بعد از استخراج مدل بهینه، کارایی آن با بازار مقایسه گردید. نتایج نشان داد که کارایی پرتفوی بهینه تشکیل شده با استفاده از مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر نوسانات *CO-GARCH* در مقایسه با کارایی بازار تفاوت معناداری دارد. لذا مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر مدلسازی *CO-GARCH* دارای کارایی بالاتری نسبت به بازار می‌باشد. پژوهش‌های بهینه‌سازی با استفاده از مدل‌های مختلف انجام شده است. ولی نتیجه از نظر موضوع که به مقایسه کارایی می‌پردازد، متفاوت است. در این پژوهش با توجه به معنی‌دار بودن تفاوت بین کارایی دو گروه، مدل مارکویتز تعدیل شده مبتنی بر مدلسازی *CO-GARCH* در قیاس با بازار برتری دارد.

References

- Anagnostopoulos, K. & Mamanis, G. (۲۰۰۹). Multiobjective evolutionary algorithms for complex portfolio optimization problems. *Springer-Verlag*, ۸(۳): ۲۵۹-۲۷۹.
- Behnamian, Javad and Moshrefi, Mohammad (۲۰۱۶). Presenting a hybrid algorithm for multi-objective optimization of stock portfolio by means of fuzzy programming, *Financial Engineering and Portfolio Management*, No. ۳۰, ۳۳-۵۳.
- Bellman, R.E., & Zadeh, L. A. (۱۹۷۰). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, ۱۷(۴), B-۱۴۱.
- Bhattacharyya, R., Hossain, S. A., & Kar, S. (۲۰۱۴). Fuzzy cross-entropy, mean, variance, skewness models for portfolio selection. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, ۲۶(۱), ۷۹-۸۷.
- Beni G, Wang J (۱۹۹۳) Swarm intelligence in cellular robotic systems. In: Dario P, Sandini G, Aebischer P (eds) Robots and biological systems: towards a new bionics?. *Springer, Berlin, Heidelberg*, pp ۷۰۳-۷۱۲
- Bridgewater: the all weather story (۱۹۹۶). <https://www.bridgewater.com/resources/all-weather-story.pdf>. Accessed Mar ۲۰۱۹.
- Cai L, Jin Y, Qi Q, Xu X (۲۰۱۸) A comprehensive study on smart beta strategies in the a-share market. *Appl Econ* ۵۰(۵۵):۶۰۲۴-۶۰۳۳. <https://doi.org/10.1080/00036846.2018.1489113>.

- Cesarone F, Tardella F (٢٠١٧) Equal risk bounding is better than risk parity for portfolio selection. *J Glob Pptimiz* ٦٨(٢):٤٣٩-٤٦١. <https://doi.org/10.1007/s10898-016-0477-6> (*The Journal of Computational Finance*, ١)
- Choueifaty Y, Coignard Y (٢٠٠٨) Toward maximum diversification. *J Portfolio Manag* ٣٥(١):٤٠-٥١. <https://doi.org/10.3905/JPM.2008.35.1.40> (Cited by ١٠٢)
- Choueifaty Y, Froidure T, Reynier J (٢٠١١) Properties of the most diversified portfolio. *J Investment Strateg* ٢:١. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1890409>.
- Chang, T, G., Yang, S, C., Chang, K.G., (٢٠٠٩), “portfolio optimization problem different risk measure using genetic algorithm”, *Expert system with application*, ٣٦, PP. ١٠٥٢٩-١٠٥٣٧.
- Chen, L. H., & Huang, L. (٢٠٠٩). Portfolio optimization of equity mutual funds with fuzzy return rates and risks. *Expert Systems with Applications*, ٣٦(٢), ٣٧٢٠-٣٧٢٧.
- Choueifaty Y, Coignard Y (٢٠٠٨) Toward maximum diversification. *J Portfolio Manag* ٣٥(١):٤٠-٥١. <https://doi.org/10.3905/JPM.2008.35.1.40> (Cited by ١٠٢).
- Chen, L. & Pan, H. (٢٠١٣). “Selection of stocks using constrained fuzzy AHP and PROMETHEE”. *Advances in information Sciences and Service Sciences (AISS)*, ٥(١٥), ٩٧- ١٠٣
- Connor G (٢٠٠٠) Active portfolio management: a quantitative approach to providing superior returns and controlling risk. *Rev Financ Stud* ١٣(٤):١١٥٣-١١٥٦
- Davey K(٢٠١٤) Building algorithmic trading systems a trader’s journey from data mining to Monte Carlo simulation to live trading.
- Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T. (٢٠٠٠). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II. *Lecture notes in computer science*, ١٩١٧, ٨٤٩-٨٥٨.
- Didekhani, Hossein and Hojjati Ostani, Saeed (٢٠١٥). Presenting a multi-objective planning model for stock selection considering fuzzy value-at-risk: a fuzzy credit theory approach, *Financial Engineering and Portfolio Management*, ٨(٣٢), ٢٣٩-٢٦٨.
- Dubois, D., & Prade, H. (١٩٨٧). The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy sets and systems*, ٢٤(٣), ٢٧٩-٣٠٠.
- Dubois, D., & Prade, H. (١٩٨٨). possibility theory: Approach to computerized processing of uncertainty, *plennm* N. ٤.
- Ebrahimi, Seyyed Babak; Jirofti, Amirsina and Abdi, Mateen (٢٠١٧). Optimizing the investment portfolio under the fuzzy credit theory using the average

- value-at-risk model, *Financial Knowledge of Securities Analysis*, ۱۱(۳۷), ۱۷-۲۷.
- Enea, M., & Piazza, T. (۲۰۰۴). Project selection by constrained fuzzy AHP. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, ۳(۱), ۳۹-۶۲.
- Fang, Y., Lai, K. K., & Wang, S. Y. (۲۰۰۶). Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory. *European Journal of Operational Research*, ۱۷۵(۲), ۸۷۹-۸۹۳.
- Giove, S., Funari, S., & Nardelli, C. (۲۰۰۶). An interval portfolio selection problem based on regret function. *European Journal of Operational Research*, ۱۷۰(۱), ۲۵۳-۲۶۴.
- Gupta, P., Inuiguchi, M., Mehlawat, M. K., & Mittal, G. (۲۰۱۳). Multiobjective credibilistic portfolio selection model with fuzzy chance-constraints. *Information Sciences*, ۲۲۹, ۱-۱۷.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (۲۰۱۴). Fuzzy Portfolio Optimization. *Springer-Verlag, Berlin*.
- Hao, f. f., & Liu, Y. K. (۲۰۰۹). Mean-variance model for portfolio selection with fuzzy random return. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, ۳۰(۱-۲), ۹-۳۸.
- Hasuike, T., Katagiri, H., & Ishii, H. (۲۰۰۷, July). Portfolio selection problems with random fuzzy variable returns. In Fuzzy Systems Conference, ۲۰۰۷. FUZZ-IEEE ۲۰۰۷. IEEE International (pp. ۱-۶). IEEE.
- Heilpern, S. (۱۹۹۲). The expected value of a fuzzy number. *Fuzzy sets and Systems*, ۴۷(۱), ۸۱-۸۶.
- Homaifar, Saghar and Roghanian, Emad (۲۰۱۵). Application of sustainable optimization models and ideal planning in the problem of choosing a multi-period investment portfolio, *Financial Engineering and Portfolio Management*, (۲۸) ۲, ۱۵۷-۱۶۳.
- Jana, P., Roy, T. K., & Mazumder, S. K. (۲۰۰۹). Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, ۲۲۸(۱), ۱۸۸-۱۹۶.
- Kamdem, J. S., Deffo, C. T., & Fono, L. A. (۲۰۱۲). Moments and semi-moments for fuzzy portfolio selection. *Insurance: Mathematics and Economics*, ۵۱(۳), ۵۱۷-۵۳۰.
- Kazemi Mian Gaskeri, Mina; Yakideh, Keykhosro and Gholizadeh, Mohammad Hassan (۲۰۱۶). Optimizing the stock portfolio (applying the value-at-risk model on cross-functionality), *Financial Management Strategy*, ۵(۲), ۱۵۹-۱۸۳.
- Kiris, S. & Ustun, o. (۲۰۱۰). Fuzzy MCDM Approach of Stocks Evaluation and Portfolio Selection, ۲۴th Mini EURO International Conference, June ۲۳-۲۶, Izmir, Turkey. PP.۳۳۰-۳۳۶.

- Kung, J. Y., Chuang, T. N., & Ky, C. M. (٢٠١١, June). A fuzzy MCDM method to select the best company based on financial report analysis. *InFuzzy Systems (FUZZ)*, ٢٠١١ IEEE International Conference on (pp. ٢٠١٣-٢٠١٧). IEEE.
- Kwakernaak, H. (١٩٧٨). Fuzzy random variables-I. Definitions and theorems. *Information Sciences*, ١٥(١), ١-٢٩.
- Lai, K. K., Wang, S. Y., Xu, J. P., Zhu, S. S., & Fang, Y. (٢٠٠٢). A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, ١٠(٦), ٦٩٨-٧٠٤.
- Li, J., & Xu, J. (٢٠٠٩). A novel portfolio selection model in a hybrid uncertain environment. *Omega*, ٣٧(٢), ٤٣٩-٤٤٩.
- Li, X., Qin, Z., & Kar, S. (٢٠١٠). Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns. *European Journal of Operational Research*, ٢٠٢(١), ٢٣٩-٢٤٧
- Markowitz H (١٩٥٢) Portfolio selection. *J Finance* ٧(١):٧٧-٩١. <https://doi.org/10.1111/j.1040-6261.1952.tb01020.x>
- Marshall C (٢٠١٥) Isolating the systematic and unsystematic components of a single stock's (or portfolio's) standard deviation. *Appl Econ* ٤٧(١):١-١١. <https://doi.org/10.1080/00036846.2014.909602> (Cited By ٣)
- Mirjalili S, Mirjalili S, Lewis A (٢٠١٤) Grey wolf optimizer. *Adv Eng Softw* ٦٩:٤٦-٦١. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2013.12.007>.
- Mullen, K., Ardía, D.; Gil, D.L., Windover, D., Cline, J.: DEoptim: an R package for global optimization by differential evolution. *J. Stat. Softw.* ٤٠(٦), ١-٢٦(٢٠١١).
- Olorunda O, Engelbrecht A (٢٠٠٨) Measuring exploration/exploitation in particle swarms using swarm diversity, pp ١١٢٨-١١٣٤. <https://doi.org/10.1109/CEC.2008.4630938> (cited By ١٠٤).
- Pakmaram, Asgar; Bahri Sales, Jamal and Waliollah, Mostafa (٢٠١٦). Selection and optimization of the stock portfolio using the genetic algorithm, using the Markowitz mean-semi-variance model, *Financial Knowledge of Securities Analysis*, No. ٣٨, ١٩-٤٢.
- Pun, C. S. (٢٠١٨). Time-consistent mean-variance portfolio selection with only risky assets. *Economic Modelling*, ٧٥, ٢٨١-٢٩٢.
- Pour Ahmadi, Zahra and Najafi, Amir Abbas (٢٠١٤). Dynamic optimization of investment portfolio considering transaction cost, *Financial Engineering and Portfolio Management*, ٢٢(٦), ١٢٧-١٤٦.
- Rubin, A., & Segal, D. (٢٠١٥). The effects of economic growth on income inequality in the US. *Journal of Macroeconomics*, ٤٥, ٢٥٨-٢٧٣.
- Rezaei, S., & Vaez-Ghasemi, M. (٢٠٢٠). A new Method for Sustainable Portfolio Selection with DEA, TOPSIS and MIP in Stock exchange

- Rudposhti, Fereydu; Rezaei, Sadegh and Salehi, Allah Karam (۲۰۱۳). Evaluating the ability and explanation of discretionary liability item models and discretionary income model to explore earnings management, *The Financial Accounting and Audit Research*, No. ۲۳, ۱۷-۴۰.
- Seltzer M (۲۰۱۸) Forbes, forbes magazine. www.forbes.com/sites/forbesfinanceuncle/2018/01/11/premium-financial-risks-and-considerations/. Accessed Mar ۲۰۱۹
- Shahmohammadi, Mohsen; Emami Meybodi, Leyli and Zare Mehrjerdi, Yahya (۲۰۱۰). Presenting a hybrid intelligent algorithm based on mean-variance-skewness fuzzy model for portfolio selection, *International Journal of Industrial Engineering and Production Management*, Year ۴, Number ۲۳, ۴۴۸-۴۵۸.
- Shaolin. M, Jiangfeng. W, Zhequan. Y, Yiping. D, Bingheng. L, (۲۰۱۱), "Thermodynamic analysis of a new combined cooling, heat and power system driven by solid oxide fuel cell based on ammonia-water mixture", *Journal of Power Sources*, Vol. ۱۹۶, pp. ۸۴۶۳- ۸۴۷۱
- Sharpe W (۱۹۹۴) The sharpe ratio. *J Portfolio Manag* ۲۱:۱. <http://search.proquest.com/docview/195581284/>
- Sharpe WF (۲۰۰۲) Budgeting and monitoring pension fund risk. *Financ Anal J* ۵۸(۵):۷۴-۸۶
- Shiri Ghahri, Amir; Didekhani, Hossein; Khalili, Kaveh and Saeedi, Parviz (۲۰۱۶). A comparative study of the multi-period multi-objective portfolio optimization model in the fuzzy credit environment with different risk criteria, *Financial Management Strategy*, ۵(۳), ۱-۲۶.
- Sinha, N. (۲۰۰۵). Growth, Inequality and Structural Adjustment: An Empirical Interpretation of the S-Curve for the Indian Economy. In *Economic Growth, Economic Performance and Welfare in South Asia* (pp. ۳۶۹-۳۸۳). Palgrave Macmillan, London
- S&P Global: US stock indexes and p ۱۰۰ official site (۲۰۱۹). <https://us.spindices.com/indices/equity/sp-۱۰۰>.
- Stoilov, T., Stoilova, K., & Vladimirov, M. (۲۰۲۱). Explicit Value at Risk Goal Function in Bi-Level Portfolio Problem for Financial Sustainability. *Sustainability*, ۱۳(۴), ۲۳۱۵.
- Stuart A, Markowitz HM (۱۹۵۹) Portfolio selection: efficient diversification of investments. *OR* ۱۰:۴.
- Teiletche J, Roncalli T, Maillard S (۲۰۱۰) The properties of equally-weighted risk contributions portfolios. In: *IDEAS Working Paper Series from RePEc*. <http://search.proquest.com/docview/1698256510/>.
- Wang, J., He, F., & Shi, X. (۲۰۱۹). Numerical solution of a general interval quadratic programming model for portfolio selection. *PloS one*, ۱۴(۳), e۰۲۱۲۹۱۳

- Wan P (۲۰۱۵) Alpha and risk factors. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781119057871.ch11> (cited By ۰) .
- Xu, D., Ren, J., Dong, L., & Yang, Y. (۲۰۲۰). Portfolio selection of renewable energy-powered desalination systems with sustainability perspective: A novel MADM-based framework under data uncertainties. *Journal of Cleaner Production*, ۲۷۵, ۱۲۴۱۱۴.
- Zhu SS, Li D, Sun X (۲۰۱۰) Portfolio selection with marginal risk control. *J Computat Finance* ۱:۱. <https://doi.org/10.21314/JCF.2010.213>.
- Zhou, F., Wang, X., Goh, M., Zhou, L., & He, Y. (۲۰۱۹). Supplier portfolio of key outsourcing parts selection using a two-stage decision making framework for Chinese domestic auto-maker. *Computers & Industrial Engineering*, ۱۲۸, ۵۵۹-۵۷۵.